

Trois vases

Alice propose à Bob le jeu suivant : elle dispose trois vases que l'on nommera A , B , C . Dans le vase A elle place 13 jetons, dans le vase B elle place 15 jetons et dans le vase C elle en place 17. A chaque étape, Bob choisit deux vases où il reste au moins un pion, il enlève un pion dans chacun de ces deux vases et il les place dans le troisième vase. L'objectif est d'obtenir deux vases vides, tous les pions se trouvant donc dans un seul vase.

Bob pourra-t-il atteindre cet objectif ?

Si oui, en combien d'étapes au minimum ?

Bob ne pourra pas rassembler tous les pions dans un seul vase.

L'état des vases peut être représenté par un triplet (vecteur).

Au départ on a $(13,15,17)$. Une étape consiste à ajouter (composante à composante) l'un des triplets suivants : $(2,-1,-1)$, $(-1,2,-1)$, $(-1,-1,2)$.

L'objectif est d'atteindre, soit $(45,0,0)$, soit $(0,45,0)$, soit $(0,0,45)$.

Analysons l'évolution du processus modulo 3 :

On a $(13,15,17) = (1,0,2) \pmod{3}$ et le but à atteindre est $(0,0,0) \pmod{3}$.

Les trois triplets que l'on ajoute à chaque étape sont égaux à $(2,2,2) \pmod{3}$. Or on a :

$$(1,0,2) + (2,2,2) = (0,2,1) \pmod{3}$$

$$(0,2,1) + (2,2,2) = (2,1,0) \pmod{3}$$

$$(2,1,0) + (2,2,2) = (1,0,2) \pmod{3}$$

Les seuls triplets que l'on atteint modulo 3 sont $(1,0,2)$, $(0,2,1)$ et $(2,1,0)$. Le triplet objectif $(0,0,0)$ ne peut donc pas être atteint.