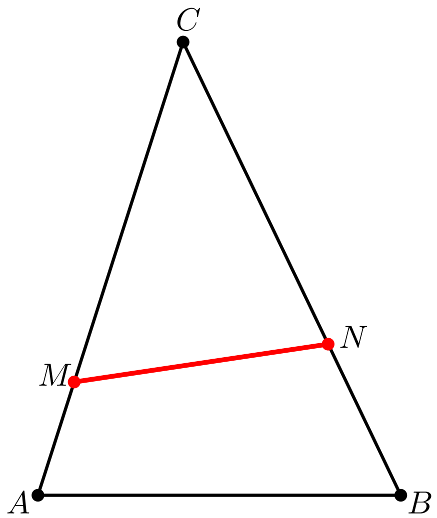
Bipartition d'un triangle en deux régions de même aire

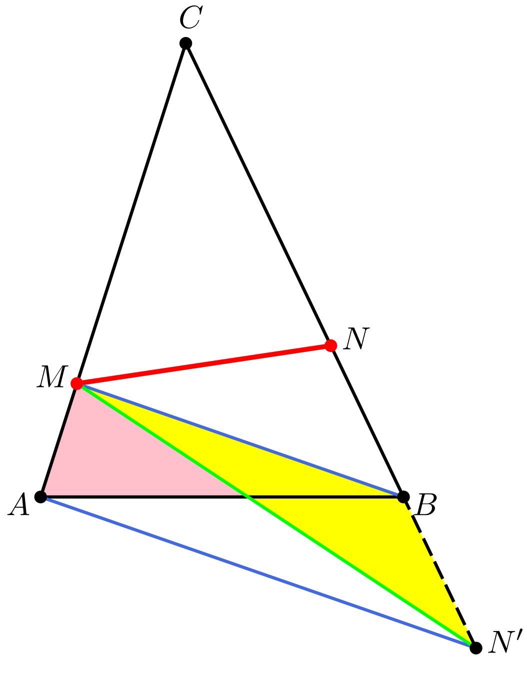
Sur le coté $[AC]$ du triangle ABC on place un point M, plus proche de A que de C.

Proposer plusieurs méthodes pour obtenir le point N sur le coté BC tel que le segment $[MN]$ partage le triangle ABC en deux régions de même aire.



Première méthode

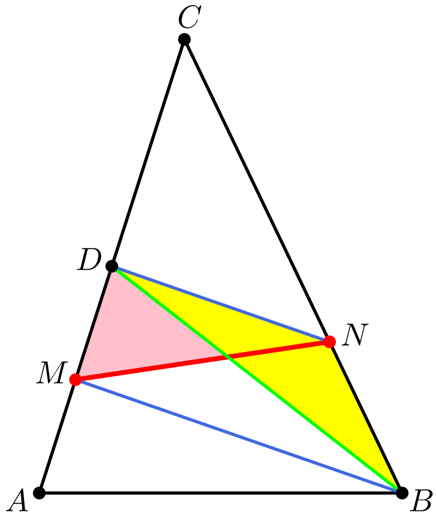
Soit N' l'intersection avec (CB) de la droite parallèle à (MB) passant par A. Alors le point N est le milieu de CN'.



On observe que $\mathcal{A}(MBA) = \mathcal{A}(MBN')$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MNBA) &= \mathcal{A}(MNB) + \mathcal{A}(MBA)\\ &= \mathcal{A}(MNB) + \mathcal{A}(MBN')\\ &= \mathcal{A}(MNN') = \mathcal{A}(MNC)\end{aligned}$$

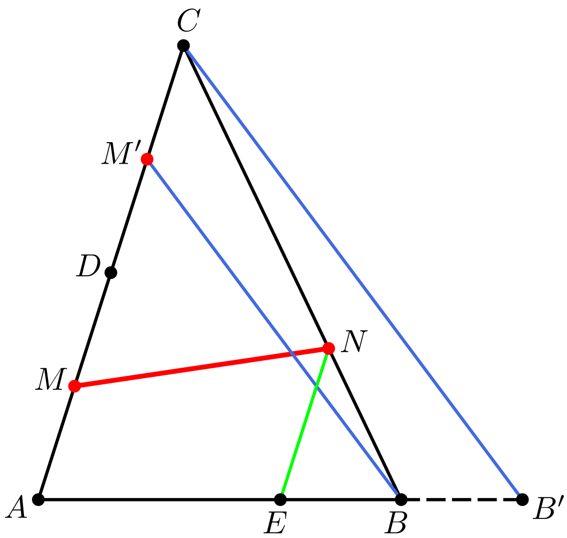
Deuxième méthode
Notons D le milieu de $[AC]$. Alors N est à l'intersection de la droite parallèle à (MB) passant par D avec la droite (CB).



En effet, on a $\mathcal{A}(DNM) = \mathcal{A}(DNB)$. On a donc :

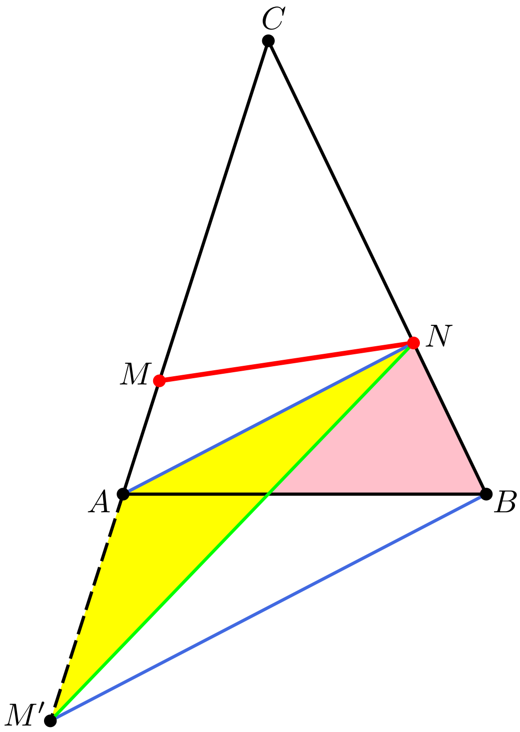
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(CNM) &= \mathcal{A}(CND) + \mathcal{A}(DNM)\\ &= \mathcal{A}(CND) + \mathcal{A}(DNB)\\ &= \mathcal{A}(CBD) = \mathcal{A}(CBA)/2\end{aligned}$$

Troisième méthode
Soit M' le symétrique de M par rapport au milieu D de $[AC]$. Notons B' l'intersection de la droite parallèle à $(M'B)$ passant par C avec la droite (AB) et soit E le milieu de $[AB']$. Alors N est l'intersection de la droite parallèle à (AC) passant par E avec la droite (CB).



Notons $\lambda := CA/CM = CA/AM' = AB'/AB$. On a $\mathcal{A}(CNM) = \mathcal{A}(CNA)/\lambda$.
Comme $\mathcal{A}(CNA) = \mathcal{A}(CEA) = \mathcal{A}(CB'A)/2$ et $\mathcal{A}(CB'A) = \lambda\,\mathcal{A}(CBA)$,
on déduit $\mathcal{A}(CNM) = \mathcal{A}(CBA)/2$.

Quatrième méthode
Soit M' le symétrique de C par rapport à M. Alors N est à l'intersection de la droite parallèle à $(M'B)$ passant par A avec la droite (CB).



En effet, on a $\mathcal{A}(ANB) = \mathcal{A}(ANM')$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MNBA) &= \mathcal{A}(MNA) + \mathcal{A}(ANB)\\ &= \mathcal{A}(MNA) + \mathcal{A}(ANM')\\ &= \mathcal{A}(MNM') = \mathcal{A}(MNC)\end{aligned}$$

Remarques :

1) La deuxième méthode est proche de la première

2) La quatrième méthode est miroir (symétrique) de la première (remplacer B par A et N par M).

3) En posant $a := CM$, $b := MA$, $c := CN$, $d := NB$, on a :

$$\frac{c}{d} = \frac{a+b}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c+d}{c-d}$$