par Guy Brousseau

L'erreur en mathématiques du point de vue didactique

La didactique des mathématiques étudie les conditions et les processus de diffusion et de l'apprentissage des mathématiques. Elle s'est beaucoup développée depuis le début des années 1970 dans le cadre des sciences mathématiques. Les didacticiens se sont naturellement intéressés au rôle de l'erreur dans l'ensemble des systèmes en présence.

Une erreur est d'abord une déclaration « contradictoire » avec un certain contexte accepté au préalable.

Récemment un très haut responsable de l'Education a accepté aimablement qu'une journaliste l'interroge « à l'improviste » sur un « savoir élémentaire » traditionnel dont une nouvelle loi exige la réintroduction à l'école primaire. La journaliste lui propose le problème suivant :

Si 5 stylos coûtent 4 euros et cinquante centimes, combien coûteront 14 stylos ?

Ce haut personnage hésite, se trouble et avoue : « je ne sais pas le faire, montrez moi ! ».
Il aurait pu effectuer mentalement le calcul suivant, en décimes, 45 : 5 = 9 ; 9 × 14 = 140 et 140 – 14 = 126, et répondre 12 euros et 60 centimes. Mais s'il l'avait fait, tous ceux qui, aujourd'hui, ne pratiquent plus ce sport auraient cru qu'il connaissait la question à l'avance. Et cette exhibition de compétence, jugée prétentieuse et dérisoire par les pipoles, aurait été une erreur politique. L'explication de la solution au tableau, trop longue pour le style de l'émission, l'aurait dévoilé comme élève ou pire comme « petit prof » : elle aurait été une erreur encore plus grave !
La journaliste s'élance alors, esquisse une disposition des nombres et fait même un vague geste pour évoquer « les célèbres produits en croix », mais elle prend brutalement conscience à son tour de la situation médiatique. Ce genre d'exposé dévoreur de temps et d'attention est incompatible avec le rythme de l'émission. Elle renonce donc.
Et au moment de cette rupture de contrat, on perçoit un temps de désarroi. Quelqu'un lui lance alors : « il faut calculer le prix d'un stylo et multiplier par quatorze ». Tout le monde est soulagé.
Il n'est même plus question de calculer mentalement le résultat ni même de donner la réponse. Le calcul direct bat la règle de trois par knock-out à la deuxième reprise : la réponse n'a pas été donnée ; dans une évaluation scolaire, ce serait un échec. Cet échec est dû à la tentative de mettre en scène les techniques inutilement pataudes de « la règle de trois » au lieu du raisonnement direct, fondé sur la compréhension de la question, le seul communicable dans ces circonstances. Cet « échec » était le seul moyen d'éviter une erreur plus grave dans la situation médiatique. La démonstration de l'inadéquation de la solution didactique préconisée par le ministère est éclatante.

Qu'est-ce qu'une erreur ?

Une ***erreur*** est d'abord une déclaration « contradictoire » avec un certain contexte accepté au préalable. Le contexte est celui d'une culture ou plus généralement celui d'une action en cours.
Il faut donc considérer au moins deux situations : celle où un actant prend une décision ou fait une déclaration erronée, généralement à son insu, et celle ou un actant, le même ou un autre, prend conscience et déclare que cette action est une *erreur*. Le second n'a pas nécessairement raison.
En mathématiques, émettre, utiliser ou croire une déclaration en contradiction avec ce qui était déjà formellement connu ou admis est une pratique fréquente, volontaire ou non. Hors de tout contexte, un énoncé n'est ni vrai ni faux. L'essentiel des réflexions d'un mathématicien au travail porte sur les rapports supposés de certains énoncés avec différents contextes. Ceux qui sont reconnus comme douteux sont des *hypothèses*, les autres seront des

erreurs ; et quand leur inconsistance avec ce qui est admis sera révélée, leur négation deviendra un théorème. Mais leur statut n'est pas établi à l'avance, il est au contraire la conclusion du travail mathématique. Nous connaissons si bien la fécondité de certaines « erreurs » que nous transformons leur usage en méthodes (démonstrations par l'absurde, contre exemples, tératologie etc.). L'erreur dans la première situation peut devenir une faute dans l'autre.

Les mathématiciens produisent des théorèmes valides sous des conditions qui n'apparaissent pas aux non spécialistes. $H \Rightarrow C$ peut être un théorème utile alors que la validité de H et de C n'est pas connue Il reste vrai même si H est faux. Des grappes de résultats de ce genre désorientent parfois les utilisateurs. Et ce fait concerne aussi l'enseignement à tous les niveaux puisque les élèves raisonnent sur des énoncés dont ils ignorent les bases.

Tous les résultats initiaux doivent être repris, remâchés et apprêtés pour être communicables, d'abord à l'intérieur de la communauté mathématique, puis tout le long de la chaîne de diffusion. Et à chaque étape, la pesée de ce qui se gagne et se perd selon qu'on veut favoriser la solution des problèmes de mathématiques actuels ou la diffusion des résultats déjà connus est un calcul de didactique. La didactique commence donc avec les mathématiques elles-mêmes, dès leur première rédaction. De plus, la culture mathématique véhicule d'inévitables abus de langage et de notations, ainsi que des erreurs de mathématiques et même de logique. Ces scories de l'histoire, ces commodités locales, ce jargon de spécialistes ne trompent pas les initiés mais ils égarent le néophyte. *Elles tendent à faire confondre les erreurs mathématiques avec les fautes contre le goût du jour de la noosphère mathématique*. Sans les connaissances de didactique, l'enseignement peine à distinguer les erreurs et les fautes.

Les élèves n'ont pas la liberté des mathématiciens: presque tout ce qu'ils peuvent dire ou faire peut être classé comme « vérité » ou comme « erreur » par rapport à la culture scolaire (le reste étant souvent considéré comme insignifiant). L'impatience ou/et le dogmatisme de leur environnement peut transformer toutes les erreurs en fautes et rendre la situation étouffante pour toute initiative et pour toute pensée. Or presque tout ce que nous pensons possède un domaine de validité, si petit et fugitif soit-il. Mais ce domaine est souvent trop étroit, et au-delà, cette pensée devient une erreur. Les élèves ne peuvent apprendre que progressivement le champ des connaissances qu'on leur enseigne. De plus on les incite - à juste titre - à étendre d'eux-mêmes le champ de ce qu'ils apprennent par divers procédés d'induction. Alors il est clair qu'inévitablement, les professeurs enseignent sans le vouloir et les élèves apprennent sans le savoir des connaissances qui se révéleront plus ou moins tard être des erreurs. Et plus l'introduction d'une notion est précoce, plus le risque est grand.

L'exemple le plus remarquable est l'introduction

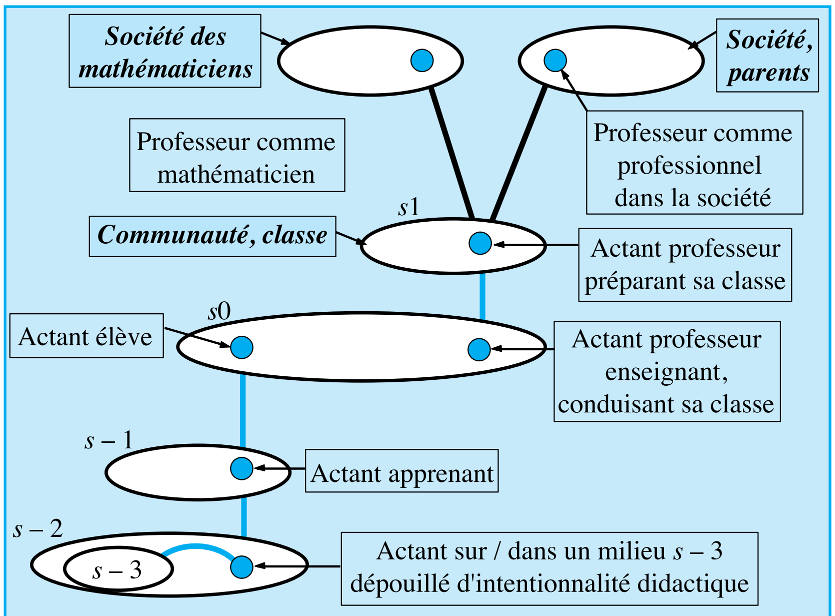
Les erreurs s'expliquent par leurs fonctions dans les diverses situations

En langue française, nous pouvons aligner plus de 50 « synonymes » du mot erreur. Cela signifie cinquante types de situations qui discriminent des « fonctions » différentes de l'erreur.

En didactique, il convient, comme ci-dessus, d'étudier toute erreur à travers son fonctionnement dans tous les systèmes où elle va jouer un rôle : le texte du savoir enseigné, les situations mathématiques, les situations d'apprentissage, les situations d'enseignement, les processus didactiques, la société scolaire, la société tout court. Tous interagissent.

Ainsi une erreur d'un élève deviendra une faute aux yeux des parents alors que l'enseignant peut avoir des raisons de ne la considérer, à un moment donné, que comme un accident ou même comme l'indice bienvenu d'une étape nécessaire dans le processus d'apprentissage. Inversement, une réponse orale correcte mais « prématurée » pourra être au contraire sanctionnée par le professeur comme une faute contre la discipline qu'il doit imposer pour pouvoir gérer sa classe etc. Ailleurs, pour satisfaire le contrat didactique, l'élève produira une réponse qu'il sait absurde à une question elle-même absurde, alors que l'observateur peu averti croira pouvoir conclure que l'élève est rendu stupide par les pratiques de son professeur.

Les divergences entre toutes les interprétations de tous ces systèmes à propos du rôle, des effets et des mesures à prendre vis à vis de l'erreur, sont peut être la source principale des difficultés. Mais nous ne nous intéressons ici qu'aux dysfonctionnements qui reposent d'abord sur une erreur au sens des mathématiques. Il en résulte deux classifications, une par sujets mathématiques, l'autre selon des types didactiques.



Les grands types de situation participant aux causes et au conséquences d'une erreur

Guy Brousseau est professeur émérite à l'IUFM d'Aquitaine. Il fut le premier, en 2004, à recevoir la médaille Félix Klein, décernée par la Commission internationale de l'enseignement des mathématiques (ICMI).

du signe égal et de l'écriture algébrique à l'école primaire. Totalement inutile à la pensée arithmétique élémentaire, il n'ajoute rien à son apprentissage. Cette inutilité le conduit à prendre un sens erroné qui provoque des séquelles d'erreurs jusqu'à l'Université. L'élève qui écrit 3 + 4 = 7 + 5 = 12, ou l'étudiant qui pour démontrer une formule refuse de partir du second membre pour calculer le premier sont les victimes de cette erreur de didactique.

Obstacles et erreurs « inévitables »

Nous avons été les premiers, je crois, à proclamer et à montrer, dans les années 70, qu'il existait des « obstacles épistémologiques » aussi bien dans l'enseignement que dans l'histoire des mathématiques . Des erreurs certes, mais qui sont légitimes, légitimement opiniâtres et parfois nécessaires.

Exemple : la division est introduite à l'école élémentaire dans les naturels, sur l'idée familière de partage. Le quotient est donc toujours inférieur au dividende. Or cette métaphore du partage crée ensuite un obstacle durable à la compréhension d'opérations comme 0,30 : 0,80 dans les décimaux ou 3/5 : 4/7, et par suite cause bien des erreurs. C'est toute la compréhension de la notion de nombre qui doit être remise en question, et les naturels font obstacle. Aujourd'hui les obstacles épistémologiques sont reconnus dans l'histoire et dans la didactique des mathématiques

Exemple : L'histoire des probabilités et des statistiques est émaillée d'erreurs de ce genre. Dans ces cas, reproduire ou suivre naïvement, dans l'enseignement, la voie historique est une erreur de didactique. Et comme la voie axiomatique que nous suivons depuis Kolmogorov produit elle aussi des obstacles, il faut imaginer, étudier théoriquement et expérimentalement des voies plus satisfaisantes.

Aucun savoir important ne s'est construit sans une histoire, personnelle et collective, sans des « erreurs » ou sans des insuffisances provisoires. De même, aucun enseignement des mathématiques ne peut fonctionner comme un discours axiomatique, achevé et sans erreurs.

Certaines erreurs sont difficiles à éradiquer, surtout quand elles sont partagées, quand elles se fondent dans la culture et quand elles ont eu un important domaine de validité. On comprend qu'on veuille les faire éviter aux néophytes.

Dans notre pratique quotidienne des mathématiques « l'erreur » tient une place si importante, si permanente et si redoutable que nous avons l'impression de bien la connaître.

Les sentiments et la rhétorique qu'elle inspire lui font jouer le rôle du diable dans certaines religions. Ni l'histoire, ni l'épistémologie ne parviennent à modérer cet héritage que la didactique doit affronter sur le terrain. L'homme est un formidable reproducteur d'algorithmes, utiles ou non, mais il n'y a pas de pensée sans compréhension donc sans droit aux erreurs de pensée et sans une pratique laïque de l'erreur.

Quand le glissement échappe au contrôle : les mathématiques modernes

Le glissement méta

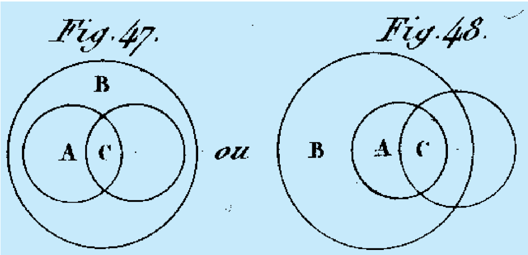
Expliquer ou commenter une question ou une réponse pour éclairer les élèves est un moyen assez efficace pour qu'ils évitent les erreurs ou qu'ils s'en corrigent. C'est la base de tout enseignement. Pour appréhender ce que l'on fait, ce que l'on pense, ce que l'on dit, ce que l'on prouve, ce qui peut être convenu… nous recourons à des descripteurs, à des langages, à des modèles, à des règles qui sont des objets méta (langage, métalangages, etc.). Les processus méta sont récursifs et sont l'essence même de la connaissance, de la culture et du savoir.

La solution d'une situation donnée fait appel à un répertoire de moyens. S'ils sont insuffisants une étude et une modification spécifique peuvent être nécessaires. Cette situation nouvelle est « méta » de la précédente. Le passage d'un sujet de l'une à l'autre est un glissement méta. Le passage de l'usage d'un moyen à la construction d'un outil et un glissement méta. Le « for - da game » de Freud est un glissement méta ; le jeu avec la bobine tend à « équilibrer » les frustrations créées par les disparitions incontrôlables de la mère. Le glissement méta est, par essence, récursif lorsqu'il échoue à résoudre la situation initiale. La chaîne du sens selon Lacan peut être interprétée comme une suite de glissements méta.

Le glissement métadidactique

Dans l'enseignement par exemple, en cas d'échec, expliquer ou exploiter l'erreur est un glissement métadidactique, le moyen d'enseignement devient un nouvel objet d'enseignement… qui peut à son tour donner lieu à un nouveau glissement. Le professeur passe beaucoup de temps à expliquer, commenter, imaginer des artifices qui requièrent à leur tour de nouveaux apprentissages, de nouvelles explications. Par exemple, le remplacement d'un partage par un calcul est un glissement méta, fort utile. Quand la chaîne récursive de glissements méta didactiques devient incontrôlée, le résultat peut être catastrophique.

Premier exemple : Modéliser la logique moderne par la théorie des ensembles pour faciliter l'étude de l'analyse moderne est un glissement méta. Pendre une version naïve de cette théorie (on un fascicule de résultats) pour un traité didactique en est un second niveau, qui dissimule les limites de l'usage du terme ensemble.



Emprunter à Euler les cercles qu'il utilisait pour illustrer les syllogismes afin de soutenir cette version naïve dans des enseignements plus élémentaire (voir les diagrammes ci-dessus) est un glissement avec un modèle faux. il exige la création d'un vocabulaire spécifique et impropre pour parler des objets mathématiques initiaux …

L'enchaînement de ces glissements métadidactiques est provoqué par les difficultés ou les échecs des glissements précédents et par l'impossibilité des professeurs de résister à l'acharnement médiatique.
Dans une situation de production matérielle, la distinction entre un objet et son méta, est souvent assez claire. Dans l'enseignement comme dans le domaine de la pensée, elle est plus confuse

Second exemple . La règle de trois telle qu'elle est présentée depuis le début de 20e siècle est le résultat d'une série de glissements métadidactiques faciles à déceler. Comme nous l'avons vu au début de cet article, son opérativité actuelle est limitée. Son dernier avatar : « les produits en croix » n'en a plus aucune et ne peut avoir aucun sens pour des enfants qui ne connaissent pas l'algèbre. Les glissements méta sont de plus en plus nombreux et alourdissent l'enseignement.
Lorsqu'ils échappent au contrôle professionnel du professeur et des élèves, sous l'effet de la didactique naïve, ils deviennent incoercibles.

L'évaluation automatique de masse, une méprise mondiale incontrôlable

.

Les évaluations automatiques de masse permettent aujourd'hui de retirer aux enseignants le monopole d'apprécier le résultat de leur travail avec l'instrument complexe et imparfait de leur expérience mathématique et professionnelle . Ces nouvelles conditions d'évaluation remettent l'appréciation des résultats et les décisions afférentes sous la responsabilité directe d'un public dont la culture didactique explicite est sommaire, contradictoire, ignorante des dispositifs à gérer et livrée à toute les manipulations. Il ne discerne pas mieux les effets catastrophiques de ses caprices en éducation qu'en économie. Les intentions en apparence les meilleures, comme la loi « No Child Left Behind » aux Etats-Unis, ont les pires conséquences (140 000 enfants jetés à la rue au Texas*). De plus, il ne peut pas évoluer de façon efficace car il ne dispose même pas des dispositifs scientifiques, culturels ou juridiques qui le conseillent habituellement dans d'autres domaines : la connaissance de l'enseignement est supposée, comme la raison, être la chose au monde la mieux partagée.
Or les évaluations automatiques de masse ne peuvent pas évaluer les « connaissances », seulement les savoirs. Elles ne distinguent pas entre erreur et échec. Elles conduisent les professeurs à prendre mécaniquement des décisions inappropriées telles que : reprendre prématurément des apprentissages en cours, fractionner et multiplier des objectifs, discriminer des groupes d'élèves, toutes mesures qui dévorent et finissent pas annuler leur temps d'enseignement réel. Les réponses qui leur sont alors dictées défigurent leurs procédés didactiques en se fondant sur une prétendue expertise venue de sciences qui n'assument pas la responsabilité de leurs applications dans le champ didactique. Les fiches d'évaluation deviennent LES objectifs, puis LES moyens d'apprentissage, puis LE moyen d'enseignement et pour finir, LES connaissances elles-mêmes. Toutes les connaissances sont désossées pour former le pathos d'un « trivial poursuit » universel.
L'***erreur en mathématiques*** ne peut pas être l'objet d'études scientifiques en Didactique. Ce serait comme traiter de « la maladie » en médecine. Je n'ai pas essayé non plus de refléter l'énorme variété des travaux des didacticiens à propos des diverses erreurs. J'ai seulement voulu en présenter un des aspects, parmi les moins connus et les plus importants.»

G. B.

Bibliographie :

• * Nichols, S.L, Berliner, D.C. (2007). Collateral Damage How High-Stakes Testing Corrupts America's Schools, Harvard Education Press.
• Brousseau Guy et Warfield Virginia (1998) "The case of GAEL". in Journal of Mathematical Behavior, n°18 (1), 1-46, octobre 1999
• Brousseau Guy (2001) "Les erreurs des élèves en mathématiques : Etude dans le cadre de la théorie des situations didactiques". Petit x 57, 5-30 (IREM et CRDP de Grenoble)
• Brousseau G. (1998) "La théorie des situations didactiques". Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Waefield. (La pensée sauvage, Grenoble).
• Roland Charnay, Michel Mante, (1991) De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, Grand N, N°48.